Balanced DesignとBalanced Arrayについて (デザインの構成と解析)

桑田, 正秀; 西井, 龍映

数理解析研究所講究録
311巻 1977年 121-130

Balanced design と balanced array について

海上保安大学校　桒田正秀
広島大 理　西井龍映

§1. 序

Resolution $2l+1$ の 2^m−FF (fractional factorial) designについて、design T が balanced であるための必要十分条件は、information matrix M_T が正則で、T が index set $\{\mu_i\}$ を持つ balanced array (B-array) $[N, m, 2, 2l]$ であることは、山本・白倉・桒田 [4] によって示された。Resolution V の 3^m−FF design について、design T が balanced であるための必要十分条件は、M_T が正則で、T が index set $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$ を持つ B-array $[N, m, 3, 4]$ であることは、桒田 [3] で示された。

ここでは、一般の s^m−FF design について、上と同様な結果が得られることを見る。

§2. Parameter の定義

Factor $F_1, F_2, \cdots, F_m$ は各々 s 種の level $0, 1, \cdots, s-1$ を持ち、Z はその assembly を辞書式順序に並べたものとする。

$$Z = \begin{bmatrix} 0, 0, \cdots, 0, 0 \\ 0, 0, \cdots, 0, 1 \\ \vdots \\ 0, 0, \cdots, 0, s-1 \\ 0, 0, \cdots, 1, 0 \\ \cdots \\ \\ s-1, s-1, \cdots s-1, s-1 \end{bmatrix} : s^m \times m$$

$\underset{\sim}{\eta}(Z)$ は Z の row vector $\underline{i}$ に対応する assembly での観測値の期待値とし、順に並べた $s^m \times 1$ の vector であるとする。

<u>定義２．１</u>　Parameter vector $\underset{\sim}{\theta}(Z)$ を次の様に定義する。

$$(2.1) \qquad \underset{\sim}{\theta}(Z) = (D_{(m)} D'_{(m)})^{-1} D_{(m)} \underset{\sim}{\eta}(Z)$$

ただし、$D = \begin{bmatrix} \underline{d}(0) \\ \underline{d}(1) \\ \vdots \\ \underline{d}(s-1) \end{bmatrix}$: $s \times s$ 行列で、D の row vector $\underline{d}(i)$ は

$\underline{d}(i) = (d_0(i), d_1(i), \cdots, d_{s-1}(i))$ $(i = 0, 1, \cdots, s-1)$ と書け、

$\underline{d}(0) = (1, 1, \cdots, 1)$ かつ $\underline{d}(i)\, \underline{d}'(j) = l_i\, \delta_{ij}$ $(l_i > 0,\ j = 0, 1, \cdots, s-1)$

を満足する。$D_{(m)}$ は D の m 回の Kronecker 積とする。

この定義より、$\theta(0, 0, \cdots, 0)$ は general mean を、

$\theta(0.\ \varepsilon_{t_1}\ \varepsilon_{t_2} \cdots \varepsilon_{t_n}\ \ 0)$ $(\varepsilon_{t_r} \in \{1, 2, \cdots, s-1\},\ r = 1, 2, \cdots, n)$ は

Factor $F_{t_1}\ F_{t_2} \cdots F_{t_n}$ の interaction を意味する。

(2.1) は $\underset{\sim}{\eta}(Z) = D'_{(m)} \underset{\sim}{\theta}(Z)$ と解くことができる。

このことから、assembly $\underline{j} = (j_1 j_2 \cdots j_m)$ による effect は、

$\eta(\underline{j}) = \sum_{\underline{\varepsilon} \in Z} d_{\underline{\varepsilon}}^{\underline{j}}\ \theta(\underline{\varepsilon})$ で表現される。ただし、$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m)$

は Z の row vector を動き、$d_{\underline{\varepsilon}}^{\underline{j}} = d_{j_1}(\varepsilon_1)\, d_{j_2}(\varepsilon_2) \cdots d_{j_m}(\varepsilon_m)$ である。

以後 $\ell+1$ Factor interaction 以上無視可能と仮定する。

N個の assembly $\underset{\sim}{j}^{(1)}, \underset{\sim}{j}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{j}^{(N)}$ から成る design T を考える。このとき，$T = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{j}^{(1)} \\ \underset{\sim}{j}^{(2)} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{j}^{(N)} \end{bmatrix}$ で表現する。$\underset{\sim}{\theta}_\nu$ は ℓ Factor interaction までのすべての parameter を並べた column vector, $\underset{\sim}{y}(T)$ を assembly $\underset{\sim}{j}^{(k)}$ による観測値を並べたものとすれば，

(2.2) $\quad \underset{\sim}{y}(T) = E_T \underset{\sim}{\theta}_\nu + \underset{\sim}{e}_T$

と書ける。ただし $\nu = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{m}{k} (s-1)^k$ (parameterの個数)，E_T は $N \times \nu$ の design matrix, $\underset{\sim}{e}_T$ は $N \times 1$ の error vector であり $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{e}_T) = \underset{\sim}{0}$，$\mathrm{Var}(\underset{\sim}{e}_T) = \sigma^2 I_N$ とする。

(2.2) の normal equation は，$M_T \hat{\underset{\sim}{\theta}}_\nu = E_T' \underset{\sim}{y}(T)$ (ただし $M_T = E_T' E_T$) であり，M_T が正則行列なら，$\hat{\underset{\sim}{\theta}}_\nu = V_T E_T' \underset{\sim}{y}(T)$ ($V_T = M_T^{-1}$) が $\underset{\sim}{\theta}_\nu$ の BLUE (best linear unbiased estimator) になり，$\mathrm{Var}(\hat{\underset{\sim}{\theta}}_\nu) = \sigma^2 V_T$ が成立する。

[注] parameter $\theta(\underset{\sim}{\alpha}), \theta(\underset{\sim}{\beta})$ に対応する行列 M_T の成分を $\varepsilon(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta})$ とすれば，$\varepsilon(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}) = \sum_{k=1}^{N} d_{\underset{\sim}{\alpha}}^{\underset{\sim}{j}^{(k)}} \cdot d_{\underset{\sim}{\beta}}^{\underset{\sim}{j}^{(k)}}$ である。

$T_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ $(1 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq m)$ を，T の t_1列 t_2列 $\cdots$ t_n列から成る $N \times n$ の sub array とする。このとき $\mu^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n}_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ を，この sub array に，row vector $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ ($\nu_r \in \{0, 1, \cdots, s-1\}$) が含まれる回数とする。さらに $\gamma^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}_{t_1 t_2 \cdots t_n} = \varepsilon(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta})$ で定義する。ただし，$\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$, $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m)$ は，

$t = t_r$ のとき $\begin{cases} \alpha_t = \varepsilon_r \\ \beta_t = 0 \end{cases}$ 又は $\begin{cases} \alpha_t = 0 \\ \beta_t = \varepsilon_r \end{cases}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ を

$t \neq t_r \ (r = 1, 2, \cdots, n)$ のときは $\alpha_t = \beta_t = 0$ を満たしている。ここに，$\varepsilon_r \in \{0, 1, \cdots, s-1\} \ (r = 1, 2, \cdots, n)$ である。

これらを辞書式順序に並べた vector を

$$\underset{\sim}{\gamma}_{t_1 t_2 \cdots t_n} = \| \gamma^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}_{t_1 t_2 \cdots t_n} \|, \quad \underset{\sim}{\mu}_{t_1 t_2 \cdots t_n} = \| \mu^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n}_{t_1 t_2 \cdots t_n} \|$$

とおけば，次の補題が成り立つ。

補題 2.1　すべての sub array $T_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ について

$\underset{\sim}{\gamma}_{t_1 t_2 \cdots t_n} = D_{(n)} \underset{\sim}{\mu}_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ が成立する。

§3. Balanced array と information matrix

Balanced array は Chakravarti [2] により最初に定義された。

定義 3.1　T が strength n で，index set $\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}} \mid i_0 + i_1 + \cdots + i_{s-1} = n\}$ を持つ balanced array (B-array) $[N, m, s, n]$ であるとは，T が $0, 1, \cdots, s-1$ を成分に持つ $N \times m$ の行列で，T のどの $N \times n$ sub array も，level が r である Factor を i_r 個持つ $(r = 0, 1, \cdots, s-1)$ すべての row vector が $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}$ 回含まれるようなものをいう。

定義 3.2　T が B-array $[N, m, s, n]$ で，その index set $\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}} \mid i_0 + i_1 + \cdots + i_{s-1} = n\}$ が $\{\lambda\}$ に等しいとき，T は index λ を持つ Orthogonal array (O-array) $[N, m, s, n]$ であると定義する。

定義3．3　M_T が balanced (又は permutation invariant) であるとは，$\forall\tau \in \mathfrak{S}_m$ に対し，$\varepsilon(\alpha,\beta)=\varepsilon(\tau\alpha,\tau\beta)$ がすべての α,β に対し成立するときをいう。ただし，$\alpha=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$ のとき，$\tau\alpha=(\alpha_{\tau(1)}\alpha_{\tau(2)}\cdots\alpha_{\tau(m)})$，$\tau\beta$ も同様に約束する。

$l \leqq [\frac{m}{2}]$ なる l に対し，$l+1$ Factor interaction 以上のすべての parameter が無視可能なら，次の2定理が成立する。

定理3．1　u Factor interaction ($u \leqq l$) 以下のすべての parameter が，他の parameter と独立に推定できるための必要十分条件は，T が O-array $[N, m, s, u+l]$ であることである。

［注］$u=l$ ならば，M_T は対角行列である．

定理3．2　M_T が balanced であるための必要十分条件は，T が index set $\{\lambda_{i_0 i_1\cdots i_{s-1}} \mid i_0+i_1+\cdots+i_{s-1}=2l\}$ を持つ B-array $[N, m, s, 2l]$ であることである。

証明の概略：補題2．1，D の直交性，$\varepsilon(\alpha,\beta)$ は $\gamma^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{2l}}_{t_1\cdots t_{2l}}$ の一次結合で書けることより．

§4．Multidimensional relationship

MDPBAS (multidimensional partially balanced association scheme) の定義は，Bose & Srivastava [1] で与えられた。それの拡張である MDRS (multidimensional relationship) は，最初に桑田 [3] で与えられた。ここでは

その定義を明らかにする。

<u>定義4.1</u>　n_i 個の元から成る集合 $S_i=\{x_{i1}\ x_{i2}\cdots x_{in_i}\}$ $(i=1,2,\cdots,L)$ があり、relation R が $\bigcup_{i=1}^{L} S_i$ の元の間に定義されていて、次の条件を満たすとき、R を MDRS という。

(i)　すべての $S_i\times S_j$ $(i,j=1,2,\cdots,L)$ に関して、local relationship set $\Pi^{i,j}$ $(|\Pi^{i,j}|=m_{ij})$ が存在して、S_i のどの元 x_{if} に対しても、S_j は m_{ij} 個の disjoint なクラスに分割され、各クラスは x_{if} と $\alpha(\in\Pi^{i,j})$ の relation にあるもの全体で、その濃度は $n_\alpha^{i,j}$ であり、x_{if} のとり方によらず一定である。

(x_{if}, x_{jg}) が $\alpha(\in\Pi^{i,j})$ の relation にあることを $R(x_{if}, x_{jg})=R_\alpha^{i,j}$ 又は $x_{if}\xrightarrow{\alpha}x_{jg}$ で表現する。

(ii)　S_i, S_j, S_k を任意に選ぶ。$(i,j,k=1,2,\cdots L)$ $\Pi^{i,k}$ の任意の元 γ に対し、$S_i\times S_k$ の元 (x_{if}, x_{kh}) で γ の関係にあるものを取る。$\forall\alpha\in\Pi^{i,j}$, $\forall\beta\in\Pi^{j,k}$ を与えると、

集合 $\left\{x_{jg}\in S_j \,\middle|\, \begin{array}{c} x_{if}\xrightarrow{\ \gamma\ }x_{kh} \\ {\scriptstyle\alpha}\searrow\quad\nearrow{\scriptstyle\beta} \\ x_{jg}\end{array}\right\}$ の濃度は、$x_{if}\xrightarrow{\gamma}x_{kh}$ である限り、x_{if}, x_{kh} の取り方によらず、$i, k, \gamma, j, \alpha, \beta$ のみに依存する定数 $g(i,k,\gamma;j,\alpha,\beta)$ である。

[注] この relation は必ずしも対称ではない。

このMDRSから、local relationship matrix $\{A_\alpha^{i,j}\mid\alpha\in\Pi^{i,j}\}$ と relationship matrix $\{D_\alpha^{i,j}\mid\alpha\in\Pi^{i,j},\ i,j=1,2,\cdots,L\}$ を次のよ

に定義する。

定義4．2　任意の (i,j) $(i,j=1,2,\cdots,L)$ を考える。$\forall\alpha\in\pi^{i,j}$ に対して，$A_\alpha^{i,j}$ は $n_i\times n_j$ 行列で，その (f,g) element $a_{f,g}^{i,j}(\alpha)$ は，

$$a_{f,g}^{i,j}(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{if } x_{if}\xrightarrow{\alpha}x_{jg}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}f=1,2,\cdots,n_i\\ g=1,2,\cdots,n_j\end{pmatrix}$$

である。

定義4．3　上の i,j,α に対し，$D_\alpha^{i,j}$ は $P\times P$ の行列で $(P=n_1+n_2+\cdots+n_L)$，L^2 個の sub matrix から成る。S_i に対応する row block，S_j に対応する column block の $n_i\times n_j$ sub matrix は $A_\alpha^{i,j}$ であり，他の sub matrix の element はすべて0である。

MDRSと $\{A_\alpha^{i,j}\}$，$\{D_\alpha^{i,j}\}$ の定義により，次の補題を得る。

補題4．1

$$A_\alpha^{i,j}A_\beta^{j,k}=\sum_{\gamma\in\pi^{i,k}}g(i,k,\gamma;j,\alpha,\beta)A_\gamma^{i,k}$$

$$D_\alpha^{i,j}D_\beta^{j',k}=\Big(\sum_{\gamma\in\pi^{i,k}}g(i,k,\gamma;j,\alpha,\beta)D_\gamma^{i,k}\Big)\delta_{j,j'}$$

がすべての $\alpha\in\pi^{i,j}$，$\beta\in\pi^{j,k}$，$i,j,k=1,2,\cdots,L$ に対し成立する。

補題4．2　$\mathcal{A}$ を $\{D_\alpha^{i,j}\mid\alpha\in\pi^{i,j}\ \ i,j=1,2\cdots L\}$ の元の $\mathbb{R}$ 上の一次結合全体とすれば，$\mathcal{A}$ は $P\times P$ 行列 $\{D_\alpha^{i,j}\}$ を base とする行列多元環になる。この algebra $\mathcal{A}$ を MDRS の relationship algebra と呼ぶ。

§5. Balanced fractional s^m factorial design

$S_{p_0p_1\cdots p_{s-1}}$ を parameter の index の集合で, $\{\alpha \in \mathcal{Z} \mid w_r(\alpha)=p_r,\ r=0,1,\cdots,s-1\}$ と定義する。ただし $w_r(\alpha)$ は vector α の元で, r であるものの個数とする。$(\ell+1)$ Factor interaction 以上無視可能としているから, unknown parameter の index の集合族 $\mathcal{S}$ は, $\{S_p \mid p=(p_0p_1\cdots p_{s-1}),\ p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}\leqq \ell\}$ である。$S=\bigcup_{S_p\in\mathcal{S}} S_p$ は unknow parameter の index 全体である。

$M(s)$ を $s\times s$ 行列全体とするとき, $S\times S$ から $M(s)$ への map W^* を次のように定義する。

<u>定義5.1</u> $S\times S \ni {}^\forall(\alpha,\beta)$ に対し, $W^*(\alpha,\beta)$ の (i,j) element $(i,j=1,2,\cdots,s)$ は, 集合 $\{t\in\{1,2\cdots m\} \mid \alpha_t=i-1,\ \beta_t=j-1\}$ の濃度とする。ただし, $\alpha=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$, $\beta=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)$ である。

[注] この map W^* は (α,β) の Factor の permutation に関する maximal invariant function である。

$\mathcal{S}$ の中に, 次のように relation を定義する。$\mathcal{S}$ の任意の元 S_p, S_q に関し, local relationship set $\pi^{p,q}$ を $\{W^*(\alpha,\beta)\in M(s) \mid (\alpha,\beta)\in S_p\times S_q\}$ とし, $S_p\times S_q \ni {}^\forall(\alpha,\beta)$ が $W(\in\pi^{p,q})$ の relation にあるとは, $W=W^*(\alpha,\beta)$ の時, かつその時に限りいう。

<u>定理5.1</u> $\mathcal{S}$ に定義された relation は MDRS である。

[注] $\pi^{p,q} \ni {}^\forall W$ に対し, $W'\in\pi^{q,p}$ が成立する。

<u>定理５．２</u>　このMDRSから生成されるrelationship algebra $\mathcal{A}$ は I_ν $(\nu=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{m}{k}(s-1)^k)$ を含む。

<u>定義５．２</u>　$\mathcal{A}$ のvector subspace $\mathfrak{A}$ を $\{B_{W}^{\rho,\delta} \mid W\in\pi^{\rho,\delta}, S_\rho, S_\delta\in\mathcal{S}\}$ の元の一次結合全体とする。ただし，

$$B_{W}^{\rho,\delta}=\begin{cases} D_{W}^{\rho,\rho} & \text{if } \rho=\delta \text{ かつ } W=W'\in\pi^{\rho,\rho} \\ D_{W}^{\rho,\delta}+D_{W'}^{\delta,\rho} & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。ただし，$W\in\pi^{\rho,\delta}$ である．

［注］定義３．３は $M_T\in\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ と言い換えてよい。

<u>定義５．３</u>　s^m－FF design T がbalanced designとは M_T が正則で，$V_T=M_T^{-1}$ がpermutation invariantであるときをいう。

ℓ が $\ell\leq[\frac{m}{2}]$ を満たすとき，次の主定理を得る。

<u>定理５．３</u>　Resolution $2\ell+1$ の s^m－FF design T がbalanced designであるための必要十分条件は，T が M_T を正則にするB－array $[N, m, s, 2\ell]$ であることである。

［証明］（⇒）仮定より $V_T\in\mathfrak{A}\subset\mathcal{A}$ であり，$\mathcal{A}\ni I_\nu$（定理５．２）から $M_T=V_T^{-1}\in\mathcal{A}$ がわかる。定義５．２の注，定理３．２より，T はB－array $[N; m, s, 2\ell]$ である。

（⇐）仮定より $M_T\in\mathfrak{A}\subset\mathcal{A}$ であり，$\mathcal{A}\ni I_\nu$ から $V_T\in\mathcal{A}$ である。故に V_T はpermutation invariantであるから，T はbalanced designである。

REFERENCES

[1] Bose, R. C. and Srivastava, J. N. (1964). Multidimensional partially balanced designs and their analysis, with applications to partially balanced factorial fractions. Sankhyā (A) 26 145-168.

[2] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhyā 17 143-164.

[3] Kuwada, M. (1977). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional 3^m factorial designs. Submitted to J. Statist. Planning Inf.

[4] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. Ann. Inst. Statist. Math. 27 143-157.